

DOI: 10.7672/sgjs2026040099

考虑剪切变形协调的极限平衡法理论与应用*

王安礼¹, 孙瑞峰², 焦海明², 张亚³, 李晨³, 徐江¹

(1. 贵州省水利水电勘测设计研究院股份有限公司, 贵州 贵阳 550002;

2. 中铁十七局集团城市建设有限公司, 贵州 贵阳 550029;

3. 贵州省水利科学研究院, 贵州 贵阳 550002)

[摘要] 通过引入材料变形特性,对传统极限平衡法进行了理论完善。基于对条间剪力与条块变形趋势的分析,提出考虑变形协调的条间力假设,进而推导出基于剪切变形协调的条间力及条底力的求解公式,并建立相应的安全系数计算方法。理论分析表明,在剪切变形协调条件下,弹性滑体纵断面剪力与剪切模量加权平均值、滑面曲率、水平位移及滑体厚度成正比。算例计算结果证明了该方法的可靠性。

[关键词] 边坡;稳定性;极限平衡法;变形协调;安全系数

[中图分类号] TU42

[文献标识码] A

[文章编号] 2097-0897(2026)04-0099-05

Theory and Application of Limit Equilibrium Method Considering Shear Deformation Compatibility

WANG Anli¹, SUN Ruifeng², JIAO Haiming², ZHANG Ya³, LI Chen³, XU Jiang¹

(1. Guizhou Water & Power Survey-design Institute Co., Ltd., Guiyang, Guizhou 550002, China;

2. China Railway 17th Bureau Group Urban Construction Co., Ltd., Guiyang, Guizhou 550029, China;

3. Guizhou Institute of Water Conservancy Science, Guiyang, Guizhou 550002, China)

Abstract: By incorporating material deformation characteristics, theoretical enhancements have been made to the traditional limit equilibrium method. Based on an analysis of inter-slice shear forces and deformation tendencies of slices, an inter-slice force assumption that accounts for deformation compatibility is proposed. Subsequently, formulas for solving inter-slice forces and base forces based on shear deformation compatibility are derived, and a corresponding method for calculating the safety factor is established. Theoretical analysis indicates that under the condition of shear deformation compatibility, the shear force on a vertical cross-section of an elastic sliding body is proportional to the weighted average of the shear modulus, the curvature of the sliding surface, the horizontal displacement, and the thickness of the sliding body. Calculation results from a case study demonstrate the reliability of the proposed method.

Keywords: slope; stability; limit equilibrium method; deformation compatibility; safety factor

0 引言

边坡稳定性分析最早是由岩土力学中侧向土压力与地基承载力分析发展起来的,将库仑的挡土墙土压力计算方法和朗肯的主动土压力与被动土压力计算方法应用到边坡稳定性分析中,建立了最

初的极限平衡法后,基于不同条间力假设的极限平衡法相继被提出,瑞典法、Bishop法、简化Janbu法、Spencer法、Morgenstern-Price法、Sarma法、Correia法、罗厄法、陆军工程师团法和不平衡推力法^[1-4],在很长一段时间内,研究者主要针对不同极限平衡法的求解方法及滑面搜索技术进行研究,鲜有涉及极限平衡法本质上的改进。近年来,随着工程应用及研究的不断深入,传统极限平衡法的不足日益凸显,不少学者针对极限平衡法的缺陷提出了改进及修正的方案,例如通过平滑滑面、调整条间力方向

* 贵州省水利科技项目(KT202408);贵州省交通运输厅科技项目(2023-1253-0735)

[作者简介] 王安礼,博士,高级工程师,E-mail:wanganli_gzslsd@126.com

[通信作者] 孙瑞峰,高级工程师,E-mail:sunruifeng_zt17ju@126.com

[收稿日期] 2025-09-25

或引入界面安全系数等途径^[5-8],旨在解决传统方法在特定情况下的偏差问题。本文结合边坡滑带以上岩土体的变形特性,提出考虑土体剪切变形协调的条间力假设,并推导新条间力假设的极限平衡法的求解公式,为极限平衡法提供更充分的力学依据。

1 基于剪切变形协调的条间力理论推导

传统的极限平衡法条间力假定仅是为了解决高阶方程组已知条件不足的问题,具有较强的人为性。然而条分刚体本质上还是变形体,条块界面上的力与变形趋势有关^[9],如图 1 所示。

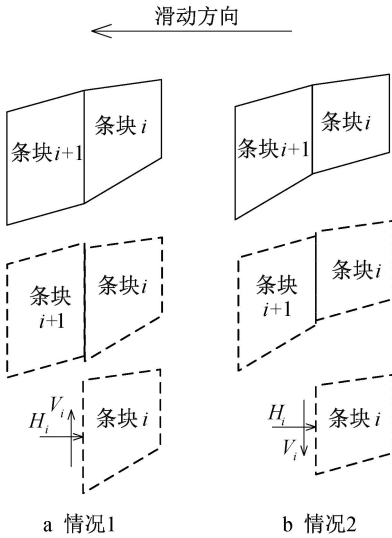


图 1 条间力方向定性分析

Fig. 1 Qualitative analysis of inter-slice force direction

由图 1 可知,向左滑动边坡的 2 个条块,当条块向左发生一定量的位移时:对于情况 1,条块 $i+1$ 相对条块 i 向上运动,因此条块 i 受到的条间力 V_i 向上,其条间力与条块 i 滑面的方向一致;对于情况 2,条块 $i+1$ 相对条块 i 向下运动,因此条块 i 受到的条间力 V_i 必然向下,其条间力与条块 i 的方向相反。可见,条块间的变形趋势或相对运动对条间剪力的方向有决定作用,现有极限平衡法的条间力假设鲜有考虑条块间的变形趋势或相对运动对条间力方向的影响,而是笼统地假设一分布函数,缺乏基本的力学依据。

本研究在充分分析条间剪力与条块变形趋势的基础上,提出考虑变形协调的条间力假设。研究目标为折线滑面,对于光滑的曲线滑面,可用多段直线段对滑面进行离散,从而转化为折线滑面。对折线滑面,条分时将竖直条分面置于滑面的折点处,离散后的条块 i 及 $i+1$ 如图 2 所示,对应条块宽度分别为 B_i 及 B_{i+1} ,条块底面与水平面的夹角分别

为 θ_i 及 θ_{i+1} ,条分界面 i 处的滑体高度为 h_i ,条间剪力方向为抵抗相对剪切位移发生的方向。

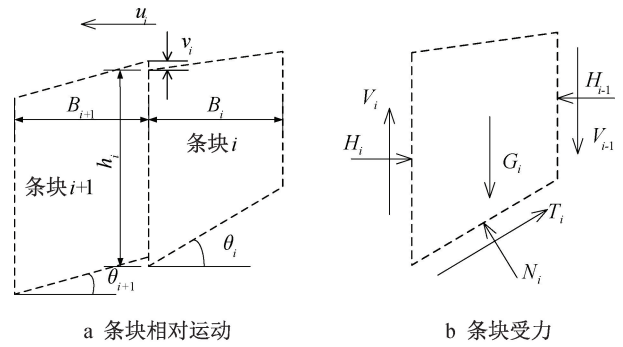


图 2 土条受力

Fig. 2 Soil bar under force

假设在滑面的条分点 i 处,滑面水平位移为 u_i ,进一步假设各条块滑动方向与条底滑面平行,于是由剪切变形协调,分析几何关系可知,相对剪切位移 v_i 如下:

$$v_i = (\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1})u_i \quad (1)$$

为计算条间剪应变以进一步进行受力分析,将条分界面 i 处剪应变计算的宽度取为 $B_{ei} = (B_i + B_{i+1})/2$,则土条剪应变 ε_i 如下:

$$\varepsilon_i = 2(\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1})u_i / (B_i + B_{i+1}) \quad (2)$$

当土体的等效剪切模量为 K_i ,条间等效剪应力 τ_{Vi} 表达式如下:

$$\tau_{Vi} = 2K_i(\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1})u_i / (B_i + B_{i+1}) \quad (3)$$

条间剪力 V_i 的计算公式为:

$$V_i = 2K_i h_i (\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1}) u_i / (B_i + B_{i+1}) \quad (4)$$

对于连续光滑的滑面,设滑面方程为 $y = f(x)$,把 θ_i 和 θ_{i+1} 分别看作 B_i 和 B_{i+1} 的函数 $\theta_i(B_i)$ 及 $\theta_{i+1}(B_{i+1})$,通过推导可证明对任意条分界面 i (滑面水平坐标对应为 x_i) 处,有:

$$\lim_{\substack{B_i \rightarrow 0 \\ B_{i+1} \rightarrow 0}} \frac{\tan\theta_i(B_i) - \tan\theta_{i+1}(B_{i+1})}{B_i + B_{i+1}} = \frac{1}{2} f''(x_i) \quad (5)$$

对应条分点 i 处的条间剪力如下:

$$V_i = K_i h_i u_i f''(x_i) \quad (6)$$

由式(6)可知,滑面上一点的条间剪力与岩土体的剪切模量 K_i 、滑体厚度 h_i 、滑面处的剪切位移 u_i 及滑面方程在条分点的二阶导数的乘积成正比,亦即条间剪力与滑体的运动状态、力学参数及几何参数有关,而非传统极限平衡法条间力。

2 力平衡方程和安全系数求解方法

2.1 力平衡方程与条间力求解

对已知滑面的边坡,将滑面以上的滑体进行条分,如图 3 所示。条块编号及节点编号规则为条块

自坡顶向下依次为 $1 \sim n$; 滑面入口处节点编号为 0 , 滑面出口处条块编号为 n ; 条分界面的编号与相应节点的编号一致。现对各条块进行受力分析, 并给出安全系数的求解方法。

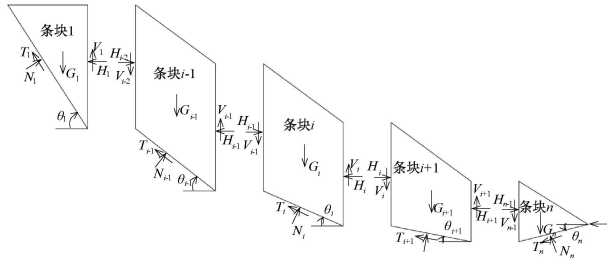


图3 边坡滑块受力

Fig. 3 Stress on slope sliding block

为简化起见, 本文仅考虑重力作用, 作用于任一条块 i 的力有重力 G_i 、条分界面 $i-1$ 上的条间剪力 V_{i-1} 及法向力 H_{i-1} , 条分界面 i 上的条间剪力 V_i 及法向力 H_i , 条底剪力 T_i 及法向力 N_i , 规定 $H_0 = V_0 = V_n = 0$ 。

相应土条 i 的几何及力学参数有条块宽度 B_i , 条底长度 $L_i = B_i / \cos \theta_i$, 条底与水平面夹角 θ_i , 滑面黏聚力 c_i , 滑面摩擦角 φ_i 。

相应条分界面 i 的几何、力学及运动参数有条分界面处土条高度 h_i , 条分界面处的推力线高度 t_i , 条分界面的平均黏聚力 \bar{c}_i 及平均内摩擦角 $\bar{\varphi}_i$ 。于是对于任意条块 i , 条间力按式(4)进行计算。

条底法向力及剪力满足莫尔-库仑强度准则:

$$T_i = N_i \tan \varphi_i + c_i L_i \quad (7)$$

水平方向及竖直方向力平衡方程:

$$H_i - H_{i-1} + T_i \cos \theta_i - N_i \sin \theta_i = 0 \quad (8)$$

$$G_i + V_{i-1} - V_i - T_i \sin \theta_i - N_i \cos \theta_i = 0 \quad (9)$$

由式(7)~(9)整理得:

$$N_i = \frac{G_i + V_{i-1} - V_i - c_i L_i \sin \theta_i}{\tan \varphi_i \sin \theta_i + \cos \theta_i} \quad (10)$$

$$T_i = N_i \tan \varphi_i + c_i L_i \quad (11)$$

$$H_i = N_i \sin \theta_i - T_i \cos \theta_i + H_{i-1} \quad (12)$$

可依次按式(4)、式(10)~(12)对条间力及条底力进行求解, 值得注意的是, 计算的条间剪力 V_i 及法向力 H_i 不应超出莫尔-库仑准则, 即当 $|V_i| > H_i \tan \bar{\varphi}_i + \bar{c}_i h_i$ 时, 条间剪力及法向力的关系应按莫尔-库仑准则进行调整, 即:

$$V_i = H_i \tan \bar{\varphi}_i + \bar{c}_i h_i \quad (13)$$

由式(7)~(9)及式(13)整理得:

$$H_i =$$

$$\frac{H_{i-1} - (G_i + V_{i-1} - \bar{c}_i h_i) \tan(\varphi_i - \theta_i) - c_i L_i / (\tan \varphi_i \sin \theta_i + \cos \theta_i)}{1 - \tan \bar{\varphi}_i \tan(\varphi_i - \theta_i)} \quad (14)$$

在此种情况下, 可按式(14)、式(13)、式(10)及式(7)对条间力及条底力进行求解。当 $H_n > 0$ 时, 说明需要提供外力才能保持平衡, 边坡安全系数 $F_s < 1$; 当 $H_n < 0$ 时, 说明不需要提供外力即能平衡, 边坡安全系数 $F_s > 1$; 当 $H_n = 0$ 时, 边坡处于临界状态。

2.2 安全系数求解

安全系数的求解借鉴了不平衡推力法的隐式解法, 具体如下。

1) 根据相关经验, 假定滑面水平位移 u_i 的分布模式, 假定 1 个较小的初始边坡安全系数 F_s 及条间安全系数 $F_1 (> 1)$, 按式(15)计算土条及土条界面的强度参数。

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{i0}}{F_s}, c_i = \frac{c_{i0}}{F_s}, \bar{\varphi}_i = \frac{\bar{\varphi}_{i0}}{F_s \cdot F_1}, \bar{c}_i = \frac{\bar{c}_{i0}}{F_s \cdot F_1} \quad (15)$$

式中: $\varphi_{i0}, c_{i0}, \bar{\varphi}_{i0}, \bar{c}_{i0}$ 分别为滑面内摩擦角、滑面黏聚力、分界面的平均内摩擦角及黏聚力。

2) 由条块 $1 \sim n$, 依序按式(4)、式(10)、式(11)及式(12)求解条间力及条底力, 当条间剪力及法向力超出莫尔-库仑准则时, 依序按式(14)、式(13)、式(10)及式(7)对条间力及条底力进行求解。

3) 当 $|H_n| < \delta$ 时, 可停止计算, 边坡的安全系数为 F_s 。

4) 当 $|H_n| > \delta$ 时, 若 $H_n > 0$, 减小安全系数 F_s , 继续步骤(1)~(2); 若 $H_n < 0$ 时, 增大 F_s , 继续步骤(1)~(2), 直至满足要求。

在上述计算过程中, 若条间法向力 $H_i (i < 0) < 0$, 则说明土体受拉, 此时取 $H_i = 0$ 。

2.3 推力线位置确定

利用上述方法求得条间力及条底力后, 通过土条力矩平衡方程计算推力线, 推力线采用由滑面末端(剪出口)第 n 个条间节点往滑面起点端计算至第 2 个条间节点, 获得第 2 个条间节点的条间力作用位置 t_2^1 , 再由第 1 个滑块计算第 2 个条间节点的条间力作用位置 t_2^2 (见图 4)。

第 n 个条间节点至第 2 个的计算公式如下:

对 O_i 点力矩平衡:

$$H_{i-1} t_{i-1} + G_i g_i - V_i B_i - H_i (t_i - B_i \tan \theta_i) - N_i L_i / 2 = 0 \quad (16)$$

式中:

$$g_i = \frac{h_{i-1} + 2h_i}{3(h_{i-1} + h_i)} B_i \quad (17)$$

整理得:

$$t_{i-1} = \frac{N_i L_i / 2 + H_i (t_i - B_i \tan \theta_i) + V_i B_i - G_i g_i}{H_{i-1}} \quad (18)$$

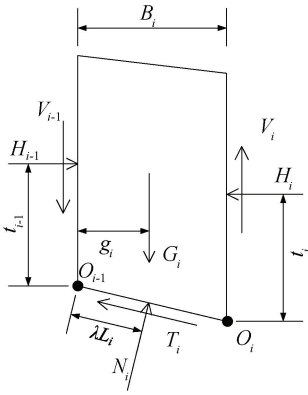


图 4 推力作用位置计算

Fig. 4 Calculation of thrust action location

据式(16),由第 1 个条块计算第 2 条间节点推力位置的公式如下:

$$t_1 = \frac{G_1 g_1 - V_1 B_1 + H_1 B_1 \tan \theta_1 - N_1 L_1 / 2}{H_1} \quad (19)$$

若 $t_1^1 = t_2^2$, 说明所有条块的力满足所有平衡方程, 若 $t_1^1 \neq t_2^2$, 则说明不满足, 需调整水平位移分布幅值进行求解。本研究通过计算机编程, 根据 H_n 及 $t_1^1 - t_2^2$ 进行迭代, 插值求取 F_s 及 u_i , 使所有平衡方程得到满足, 即 $H_n = 0$ 且 $t_1^1 = t_2^2$ 。

3 算例分析

基于上述理论, 采用 ACADS 标准考题 Ex1(a) 对提出的方法进行验证。考题 1(a) 为均质边坡, 其几何形状如图 5 所示。材料黏聚力为 3kN/m^2 , 内摩擦角为 19.6° , 重度为 20kN/m^3 , 弹性模量为 10MPa , 泊松比为 0.25 。

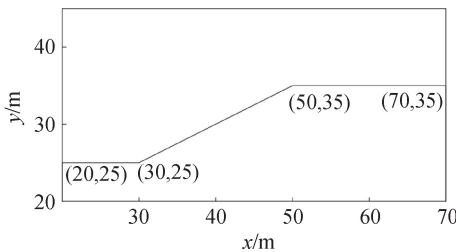


图 5 均质边坡剖面

Fig. 5 Homogeneous slope profile

本文的滑面搜索方法采用蚁群算法, 具体方法参见文献[10]。计算中, 取条间安全系数 $F_1 = 1$, 滑面水平位移假定为均匀分布。

本文计算得到的边坡安全系数为 0.998 (裁判答案为 1), 对应滑面及推力线如图 6 所示, 对应的条间剪力、法向力及条间力夹角正切值分布如图 7 所示。在 Rocscience Slide 6.0 的 Morgenstern-Price 法中, 采用本文计算所得的条间力夹角分布函数得到的安全系数为 0.981 , 采用默认的条间力夹角分

布函数为半正弦分布函数, 计算安全系数为 0.976 , 推力线如图 8 所示。本文所提出的方法的计算结果与推荐答案及 Morgenstern-Price 法的计算结果均很接近, 说明本文提出方法对均质边坡分析计算的有效性。

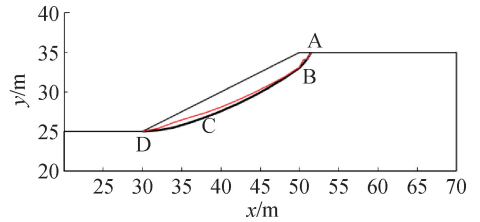


图 6 采用本文条间力夹角分布函数计算的滑面及推力线
Fig. 6 The slip surface and thrust line calculated using the inter-slice force angle distribution function presented in this article

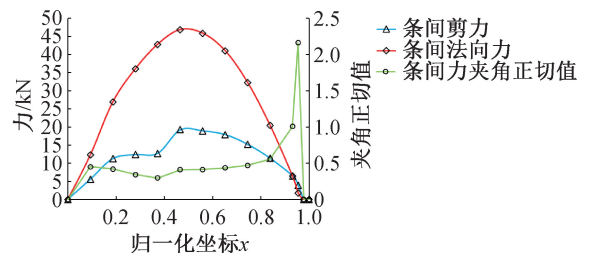
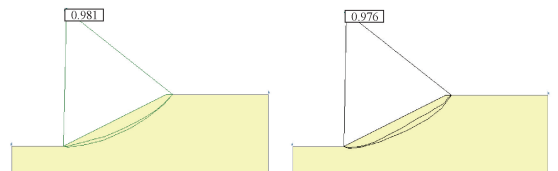


图 7 本文方法计算的条间剪力、法向力及条间力夹角正切值分布

Fig. 7 The distribution of inter-strip shear force, normal force, and tangent value of the angle between inter-strip forces calculated by the method in this paper



a 采用本文条间力夹角分布函数的 Morgenstern-Price 法
b 采用半正弦条间力夹角分布函数的 Morgenstern-Price 法

图 8 Morgenstern-Price 法计算的滑面及推力线
Fig. 8 Slip surface and thrust line calculated by Morgenstern-Price method

对比图 6, 7 可知, 在靠近坡顶处的 AB 段, 由于土条重力小, 下滑力小, 由条底的抗剪强度即可抵抗下滑力, 在宏观上表现为坡顶处存在拉应力; 在 B 点的条分线上, 由于从上方土条传递下来的法向力很小, 条分线上主要由黏聚力与重力相平衡, 导致较大的条间剪力, 因此条间剪力与法向力比值大, 达到 2.17 , 即条间力与水平方向夹角很大; 在滑面较平顺的段落 BC, 条间力倾角的正切值总体呈中间小、两头略高的态势, 与滑面的二次导数基本一致;

在 C 点处,滑面存在明显转折,二阶导数较大,对应的条间力倾角的正切值也较大。综上所述, BCD 段的条间剪力分布总体符合基于变形协调条间力假设的基本预期,可见本文所提出的基于剪切变形协调的极限平衡法的具有明确的力学意义。

本文计算的推力线与 Morgenstern-price 法用半正弦条间力夹角分布函数有较大区别,本文计算得到的推力线在滑面中下部相对位置较高,在滑面上部,推力线的相对位置较低;Morgenstern-Price 法中,采用本文计算所得的条间力夹角分布函数,计算得到的推力线与本文计算结果接近,说明本文计算结果可靠。采用半正弦条间力夹角分布函数计算得到的推力线在滑面的中下部相对位置较低,而在滑面上部,推力线的相对位置较高。

4 结语

本文在极限平衡条分法中引进了剪切变形协调的基本假设,推导了条间力分布的理论公式,进一步推导了条间力及条底力的求解公式,给出了安全系数的求解方法并给出了实例验证,主要取得如下结论。

1)理论推导表明,在剪切变形协调的假设下,当滑体处于弹性状态时,滑体在条分点 x_i 处,其条间剪力与滑体在该断面处的等效剪切模量 K_i 、滑面的二阶导数 $f''(x_i)$ 、滑面水平位移 u_i 、滑体厚度 h_i 乘积成正比,即 $V_i = K_i h_i u_i f''(x_i)$,离散形式为 $V_i = 2K_i (\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1}) u_i / (B_i + B_{i+1}) h_i$ 。

2)算例分析表明,本文提出的基于剪切变形协调极限平衡法能同时满足力平衡方程和力矩平衡方程,边坡安全系数的计算结果与 Morgenstern-Price 法接近,说明本文提出方法可靠。

3)本文提出基于剪切变形协调极限平衡法计算的条间力与传统极限平衡法条间力假设有较大区别,本文的条间力计算方法具有严格的力学基础。

4)本文所提方法主要适用于均质或近似均质的边坡稳定性分析,尤其适用于滑面形态复杂(如折线型或经离散处理的曲线型滑面)的工程场景。该方法通过引入条间剪切变形协调假设,充分考虑了土体变形特性对条间力分布的影响,可有效解决传统极限平衡法中因条间力假设不合理导致的力学偏差问题,适用于静力条件下需精确评估边坡稳

定性的工程,例如水利水电工程中的库岸边坡、道路边坡、建筑基坑及自然斜坡等。对于滑面存在显著几何变化(如倾角突变或滑体厚度差异较大)的边坡,该方法通过离散滑面并结合剪切模量、滑面位移及二阶导数等参数,能够更合理地反映条间剪力与变形趋势的力学关系。

参考文献:

- [1] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Géotechnique, 1955, 5(1): 7-17.
- [2] SPENCER E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces [J]. Géotechnique, 1967, 17(1): 11-26.
- [3] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. Géotechnique, 1965, 15(1): 79-93.
- [4] SARMA S K. Stability analysis of embankments and slopes[J]. Journal of the geotechnical engineering division, 1979, 105(12): 1511-1524.
- [5] 时卫民, 郑颖人, 唐伯明, 等. 边坡稳定不平衡推力法的精度分析及其使用条件[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(3): 313-317.
SHI W M, ZHENG Y R, TANG B M, et al. Accuracy and application range of imbalance thrust force method for slope stability analysis [J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2004, 26(3): 313-317.
- [6] 孙敏. 边坡稳定分析中瑞典条分法的改进[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2007, 37(S1): 225-227.
SUN M. Modification of Swedish slice method in slope stability analysis[J]. Journal of Jilin University (earth science edition), 2007, 37(S1): 225-227.
- [7] XIAO S G. Improved transfer coefficient method for stability analysis of a landslide with polyline slip surface [J]. Indian geotechnical journal, 2019, 49(6): 595-602.
- [8] WANG X, HU X L, LIU C, et al. Research on reservoir landslide thrust based on improved morgenstern-price method [J]. Journal of earth science, 2024, 35(4): 1263-1272.
- [9] 方玉树. 边坡稳定性分析条分法条间力合理性研究[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2008, 19(2): 80-86.
FANG Y S. Rationality of inter-slice forces of slices method for slope stability analysis [J]. The Chinese journal of geological hazard and control, 2008, 19(2): 80-86.
- [10] 孙聪, 郑宏, 李春光, 等. 基于蚁群算法的严格最大剩余推力临界滑动面搜索[J]. 岩土力学, 2014, 35(10): 3021-3026.
SUN C, ZHENG H, LI C G, et al. Critical slip surface search by using rigorous maximum residual thrust method based on ant colony algorithm [J]. Rock and soil mechanics, 2014, 35(10): 3021-3026.